Lycée Pierre Bourdieu Année 2013-2014
Terminale S2

Complexes et Equations

Exercice 1.

On considère l'équation (E) $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=0$ où z désigne un nombre complexe.

1. (a) Montrer que (E) admet une solution réelle, note z_1.
   (b) Déterminer les deux nombres complexes a et b tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-z_1)(z-2-2\mathrm{i})(az+b)$$
2. Résoudre (E).

Exercice 2.

On considère l'équation :
$$(\mathrm{E})\quad z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=0$$
où z est un nombre complexe.

1. Démontrer que le nombre complexe i est solution de cette équation.
2. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait :
$$z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})\left(az^2+bz+c\right).$$
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 3.

1. Quels que soient les complexes Z et Z_1 , montrer que : $(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}_1)(\mathrm{Z}+\mathrm{Z}_1)(\mathrm{Z}-i\mathrm{Z}_1)(\mathrm{Z}+i\mathrm{Z}_1)=\mathrm{Z}^4-\mathrm{Z}_1^4$
2. Soit (E) l'équation $(z-2)^4=(z+1-i)^4$ d'inconnue le complexe z. En utilisant la question précédente, résoudre (E).

Exercice 4.

On pose $\mathrm{P}(z)=z^4-6z^3+23z^2-34z+26$.

1. α désigne un complexe quelconque. Montrez que $\mathrm{P}(\overline{\alpha})=\overline{\mathrm{P}(\alpha)}$.
   En déduire que si $\mathrm{P}(\alpha)=0$ alors $\mathrm{P}(\overline{\alpha})=0$.
2. Calculer $\mathrm{P}(1+i)$. En déduire deux solutions complexes de l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.
3. Calculer $\mathrm{Q}(z)=(z-(1+i))(z-(1-i))$. Déterminez un polynôme $\mathrm{R}(z)$ du second degré en z tel que pour tout complexe z , $\mathrm{P}(z)=\mathrm{Q}(z)\mathrm{R}(z)$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.

Exercice 5.

On considère le polynôme P défini par : $\mathrm{P}(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1. Démontrer que l'équation $\mathrm{P}(z)=0$ admet deux solutions imaginaires pures conjuguées l'une de l'autre.
   Donner la forme trigonométrique de la solution dont la partie imaginaire est strictement négative.
2. Démontrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que pour tout z complexe, on ait $\mathrm{P}(z)=(z^2+3)\mathrm{Q}(z)$.
3. Déduire de la question précédente toutes les solutions de l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.
4. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{u},\vec{v})$ les points d'affixes respectives les solutions de l'équation $\mathrm{P}(z)=0$.
5. Démontrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.