Correction Complexes et Equations

Corrigé Exercice 1.

1. (a) $z_1 \in \mathbf{R}$ est solution de $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=0 \Leftrightarrow z_1^3-(4+\mathrm{i})z_1^2+(7+\mathrm{i})z_1-4=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Re\left(z_1^3-(1+\mathrm{i})z_1^2+(7+\mathrm{i})z_1-4\right)=0 \\ \Im\left(z_1^3-(1+\mathrm{i})z_1^2+(7+\mathrm{i})z_1-4\right)=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z_1^3-4z_1^2+7z_1-4=0 \\ -z_1^2+z_1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1^3-4z_1^2+7z_1-4=0 \\ z_1=0 \text{ ou } z_1=1 \end{cases}$$

Seul le nombre 1 vérifie la première équation. On a donc $z_1=1$.

(b) On doit avoir $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-1)(z-2-2\mathrm{i})(az+b)$.
En identifiant les termes de plus haut degré on obtient $a=1$ et en identifiant les termes constants :

$$-4=b(2+2\mathrm{i}) \Leftrightarrow -2=b(1+\mathrm{i}) \Leftrightarrow b=\frac{-2}{1+\mathrm{i}}=\frac{-2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-(1-\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$$

Conclusion $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(7+\mathrm{i})z-4=(z-1)(z-2-2\mathrm{i})(z-1+\mathrm{i})$.

2. La factorisation précédente donne les trois solutions de l'équation :

$$\mathrm{S}=\{1\ ;\ 2+2\mathrm{i}\ ;\ 1-\mathrm{i}\}.$$

Corrigé Exercice 2.

Soit (E) l'équation $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=0$.

1. On a : $\mathrm{i}^3-(4+\mathrm{i})\mathrm{i}^2+(13+4\mathrm{i})\mathrm{i}-13\mathrm{i}=-\mathrm{i}+4+\mathrm{i}-4+13\mathrm{i}-13\mathrm{i}=0$ donc i est solution de (E).
2. $(z-\mathrm{i})(az^2+bz+c)=az^3+(b-a\mathrm{i})z^2+(c-b\mathrm{i})z-\mathrm{i}c$.
Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients sont égaux. On obtient le système :
$$\begin{cases} a &= 1 \\ b-a\mathrm{i} &= -4-\mathrm{i} \\ c-b\mathrm{i} &= 13+4\mathrm{i} \\ -\mathrm{i}c &= -13\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ c &= 13 \\ b-\mathrm{i} &= -4-\mathrm{i} \\ 13-b\mathrm{i} &= 13+4\mathrm{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -4 \\ c &= 13 \end{cases}$$
donc $z^3-(4+\mathrm{i})z^2+(13+4\mathrm{i})z-13\mathrm{i}=(z-\mathrm{i})(z^2-4z+13)$.
3. L'équation (E) s'écrit $(z-\mathrm{i})(z^2-4z+13)=0$.
Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

   (a) On a $z-i=0 \Leftrightarrow z=i$

   (b) $z^2-4z+13=0$.
   $\Delta=-36=(6\mathrm{i})^2<0$. Il y a deux racines complexes conjuguées $\dfrac{4-6\mathrm{i}}{2}=2-3\mathrm{i}$ et $2+3\mathrm{i}$.

   L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{\mathrm{i}\ ;\ 2-3\mathrm{i}\ ;\ 2+3\mathrm{i}\}$

Corrigé Exercice 3.

1. On a

$$(\mathrm{Z}-\mathrm{Z}_1)(\mathrm{Z}+\mathrm{Z}_1)(\mathrm{Z}-i\mathrm{Z}_1)(\mathrm{Z}+i\mathrm{Z}_1)=(\mathrm{Z}^2-\mathrm{Z}_1^2)(\mathrm{Z}^2-(i\mathrm{Z}_1)^2)=(\mathrm{Z}^2-\mathrm{Z}_1^2)(\mathrm{Z}^2+\mathrm{Z}_1^2)=\mathrm{Z}^4-\mathrm{Z}_1^4.$$

2. L'équation (E) devient :

$$(z-2)^4 = (z+1-i)^4 \Leftrightarrow (z-2)^4 - (z+1-i)^4 = 0$$

Or en posant $\mathrm{Z} = z-2$ et $\mathrm{Z}_1 = z+1-i$, on obtient ;

$$\text{(E)} \quad \Leftrightarrow (2z-1-i)(-3+i)(z-2+iz+i+1)(z-2-iz-i-1) = 0$$

$$\text{(E)} \quad \Leftrightarrow (2z-1-i)(-3+i)(z(1+i)-1+i)(z(1-i)-3-i) = 0$$

$$\text{(E)} \quad \Leftrightarrow (z = \frac{1+i}{2} \text{ ou } z = \frac{1-i}{1+i} \text{ ou } z = \frac{3+i}{1-i})$$

L'équation (E) admet donc trois solutions, $\boxed{\mathrm{S} = \{\frac{1+i}{2}; -i; 1+2i\}.}$

Corrigé Exercice 4.

On pose $\mathrm{P}(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.

1. $\mathrm{P}(\overline{\alpha}) = (\overline{\alpha})^4 - 6(\overline{\alpha})^3 + 23(\overline{\alpha})^2 - 34(\overline{\alpha}) + 26 = (\overline{\alpha^4}) - 6(\overline{\alpha^3}) + 23(\overline{\alpha^2}) - 34(\overline{\alpha}) + 26 = \overline{\alpha^4 - 6\alpha^3 + 23\alpha^2 - 34\alpha + 26}$ (d'après les propriétés du conjugué)
   Ainsi $\boxed{\mathrm{P}(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \overline{\mathrm{P}(\alpha)} = \overline{0} \Leftrightarrow \mathrm{P}(\overline{\alpha}) = 0}$
2. Par calcul, on obtient $\mathrm{P}(1+i) = 0$.
   D'après la remarque précédente, comme $1 + \mathrm{i}$ est racine, son conjugué $1 - \mathrm{i}$ est également racine.
3. Calculons $\mathrm{Q}(z) = (z - (1+i))(z - (1-i)) = z^2 - 2z + 2$
4. On cherche R sous la forme $\mathrm{R}(z) = az^2 + bz + c$
   avec $\mathrm{P}(z) = \mathrm{R}(z) \times \mathrm{Q}(z)$ En analysant les termes en z^4, on obtient $a = 1$, et en analysant le terme constant, on obtient $c = 13$.
   Si on regarde les termes en z, on obtient : $2b - 26 = -34 \Leftrightarrow b = -4$
   Donc $\mathrm{P}(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 - 4z + 13)$
5. $\mathrm{P}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{R}(z) = 0$ ou $\mathrm{Q}(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$ ou $z^2 - 4z + 13 = 0$
   La première équation a pour solution $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$.
   Pour la seconde $\Delta = 16 - 52 = -36$
   Donc deux solutions $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 2 - 3\mathrm{i}$.
   Conclusion : les solutions de $\mathrm{P}(z) = 0$ sont $\mathrm{S} = \{1 - \mathrm{i}; 1 + \mathrm{i}; 2 + 3\mathrm{i}; 2 - 3\mathrm{i}\}$.